MP83. Problème de janvier 2009

Soit $a_0 = 2009$ et $a_{n+1} = \dfrac{a_n^{\;2}}{(a_n+1)}$ pour tout entier non-négatif n . Démontrer que, lorsque $0 \leq n \leq 1005$, $2009 - n$ est le plus grand entier inférieur ou égal à a_n .

> [A l'aide d'un tableur, on voit aisément que la propriété est vraie pour n compris entre 0 et 1271, car $a_{1271} \approx 738{,}9996677$ et $a_{1272} \approx 738{,}0010191$. Nous allons démontrer ce fait plus précis, une méthode pour 1005 résulte d'une (énorme) simplification du raisonnement.]

Proposition 1. Si, pour un certain n, la partie entière de a_n est égale à $(2009 - n)$,
— cette propriété est vraie pour tous les indices k inférieurs à n ,
— la partie décimale Δ_k de a_k est inférieure à la partie décimale Δ_n de a_n et Δ_n vérifie : $[\ln 2012 - \ln (2012 - n)] < \Delta_n \leq [\ln 2010 - \ln(2010 - n)]$.

> [*démonstration :* Pour tout n on a : $a_n - (2009 - n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{a_k+1}$ [immédiat par récurrence].
>
> Donc si $(2009 - n)$ est la partie entière de a_n , sa partie décimale Δ_n vaudra $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{a_k+1}$ et il est clair que, pour tous les indices inférieurs, $(2009 - k)$ est bien la partie entière de a_k . Soit donc n une valeur non nulle pour laquelle on sache que la partie entière de a_n est bien égale à $(2009 - n)$. Pour tout indice $k \leq n$, on a donc l'encadrement : $2009 - k \leq a_k < 2010 - k$ et par suite : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2011-k} < \Delta_n \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2010-k}$.
>
> D'où, en considérant les fonctions en escaliers encadrant la fonction $f(x) = 1/x$:
>
> $$\int_{(2012-n)}^{2012} \frac{dx}{x} < \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2011-k} < \Delta_n \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2010-k} < \int_{(2010-n)}^{2010} \frac{dx}{x} \qquad \text{(etc.).]}$$

Corollaire : La partie entière de a_n ne peut être égale à $(2009 - n)$ que si n est inférieur ou égal à 1271.

> [En effet, si n est une valeur acceptable ont doit avoir $[\ln 2012 - \ln(2012 - n)] < 1$ et on aura donc $\dfrac{2012}{2012-n} < e \approx 2{,}718281828\ldots$ c'est-à-dire : $n < 1271{,}826564$.]

Il reste à montrer que la partie entière de a_{1271} est bien égale à $2009 - 1271 = 738$.

1) Prouvons, pour commencer, que la partie entière du terme a_{1269} est bien égale à $2009 - 1269 = 740$ et que sa partie décimale est majorée par 0,9994 [*On monte (presque) au ciel en tirant sur ses lacets de chaussures…*] :

> Montrons par récurrence que, pour tout $n \leq 1268$ la partie entière de a_n est bien égale à $2009 - n$ et que sa partie décimale est majorée par 0,998 .

La propriété est naturellement vraie pour $n = 0$; supposons-la vérifiée pour un certain $n < 1268$. On a donc, par hypothèse : $\Delta_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{a_k+1} < 0{,}998$.

Mais comme $2009 - n \leq a_n < 2010 - n$ et comme $n < 1268$, il vient :

$$\frac{1}{a_n+1} < \frac{1}{742} = 0{,}001347709\ldots ,$$

d'où l'on tire : $\Delta_{n+1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{a_k+1} + \frac{1}{a_n+1} = \Delta_n + \frac{1}{a_n+1} < 0{,}998 + 0{,}0014 < 1$.

Donc $[2009 - (n + 1)]$ est encore la partie décimale de a_{n+1} et, en appliquant la proposition 1 à cet indice $(n + 1)$, on obtient :

$\Delta_{n+1} \leq [ln\ 2010 - ln(2010 - n - 1)] < ln 2010 - ln 741 \approx 0{,}997889 < 0{,}998$.

Ce qui prouve la propriété cherchée jusqu'à $n = 1268$. Le cas de 1269 s'en déduit ensuite aisément :

$$\Delta_{1269} = \Delta_{1268} + \frac{1}{a_{1268}+1} < 0{,}997889 + \frac{1}{742} = 0{,}997889 + 0{,}001347709 < 1 .$$

2) Montrons que la propriété est encore vraie pour 1270 et 1271. Comme on le voit, la majoration donnée par la proposition 1 ne suffit plus dans le cas de 1270 car elle donne une majoration de $\Delta_{1269} \leq ln(2010/740) \approx 0{,}999239815$ et que l'on dépasse donc 1 en ajoutant 1/741 . En fait, la "vraie valeur" de Δ_{1269} est de l'ordre de 0,99697 et elle permet d'ajouter non seulement 1/741, mais aussi 1/740, avant de dépasser l'unité fatidique. Il convient donc de gravir "avec les dents" les derniers échelons de cette quête aussi grandiose qu'inutile…

a) Reprenons la proposition 1 et utilisons-la pour améliorer la majoration des parties décimales. Comme $[ln\ 2012 - ln\ (2012 - n)] < \Delta_n$, nous pouvons en déduire que, pour tout nombre a_n dont la partie entière est bien $(2009 - n)$, on a :

$$a_n > (2009 - n) + [ln\ 2012 - ln\ (2012 - n)] .$$

Ceci nous permet de reprendre le raisonnement de la proposition 1 et de prouver :

Proposition 2. Si, pour un certain n, la partie entière de a_n est égale à $(2009 - n)$,

— cette propriété est vraie pour tous les indices k inférieurs à n ,

— la partie décimale Δ_k de a_k est inférieure à la partie décimale Δ_n de a_n et Δ_n vérifie :

$$\frac{2010}{2009} ln\left(\frac{4042109}{4042109 - 2009n}\right) \leq \Delta_n \leq \frac{2012}{2011} ln\left(\frac{4044120}{4044120 - 2011n}\right) .$$

[*démonstration :* On a désormais, pour tout n acceptable :

$$\Delta_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{a_k+1} \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2010-k+[ln\,2012-ln\ (2012-k)]} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2010-k-ln\left(1-\frac{k}{2012}\right)}$$

et comme $ln(1+x) \leq x$, on a : $\Delta_n \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2010-k\left(\frac{2011}{2012}\right)}$, que l'on peut majorer par l'intégrale : $\int_0^n \frac{dx}{2010-\frac{2011}{2012}x} = \frac{2012}{2011} ln\left(\frac{4044120}{4044120-2011n}\right)$. (Une minoration s'obtiendrait de façon analogue.)]

b) Ceci donne : $\Delta_{1269} \leq 0{,}997534363$ et $\Delta_{1270} \leq 0{,}998883652$. Cette majoration permet donc de passer à 1270… mais pas encore à 1271 ! Cette dernière étape est naturellement la plus difficile. La méthode précédente (qui consisterait à reprendre la minoration correspondant à la proposition 2 pour en déduire une majoration plus fine) ne semble pas suffisante. Il convient en fait de raffiner la majoration par l'intégrale à partir de la méthode des trapèzes. Malheureusement celle-ci donne ici une *minoration*, si bien qu'il devient nécessaire d'estimer l'erreur commise à partir de la dérivée seconde. Il n'est pas sûr que l'énergie ainsi dépensée soit vraiment raisonnable… mais bon ! On obtient, à l'aide de la formule :

$$\left| \left[\sum_{k=0}^{n-1} f(k) - \frac{1}{2} f(0) - \frac{1}{2} f(n-1) \right] - \int_0^{n-1} f(t)dt \right| \leq \frac{(n-1)}{12} sup\ |f''(t)|$$

$$\Delta_n \leq \int_0^{n-1} \frac{dx}{2010-\frac{2011}{2012}x} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2010} + \frac{1}{2010-\frac{2011}{2012}(n-1)}\right] + \frac{(n-1)}{12} \times 2 \times \left(\frac{2011}{2012}\right)^2 \times \frac{1}{\left[2010-(n-1)\frac{2011}{2012}\right]^3}$$

Ce qui implique : $\Delta_{1270} \leq 0{,}998458$, et suffit donc à franchir le dernier pas…